

209
ISTITUTO DI STORIA DELLA SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

annesso alla Cattedra di Scienza delle Costruzioni
della Facoltà di Architettura del Politecnico di Torino

Anno 1952 - N. 2

PROF. ING. DOTT. GIUSEPPE MARIA PUGNO

LEONARDO DA VINCI
ED ENRICO BETTI

TORINO
EDIZIONI RUATA
1952

POLITECNICO DI TORINO
SISTEMA BIBLIOTECARIO

624.

07

pug

BIBL. DI ARCHITETTURA

72.034 (Leonardo), 624.07(051) PUG

ISTITUTO DI STORIA DELLA SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

annesso alla Cattedra di Scienza delle Costruzioni
della Facoltà di Architettura del Politecnico di Torino

Anno 1952 - N. 2

PROF. ING. DOTT. GIUSEPPE MARIA PUGNO

**LEONARDO DA VINCI
ED ENRICO BETTI**

EDIZIONI RUATA

TORINO

Via Montebello, 15

1952



SBPT - 000079109



PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA

Off. Grafica Temporelli & C. - Torino

LEONARDO DA VINCI ED ENRICO BETTI

È noto come uno dei teoremi più fecondi di applicazioni nella moderna Teoria dell'Elasticità sia dovuto al pistoiese Enrico Betti, vissuto nel bel mezzo del secolo scorso (1823-1892).

Egli, che era stato dapprima professore di Liceo, passò poi, nel 1857, all'Università di Pisa nella quale rimase fino alla morte. Pur dedicandosi agli studi, non disdegnò, nel contempo, la politica; difatti dal 1862 lo troviamo alla Camera dei Deputati quale rappresentante della sua città natale e nel 1884 al Senato. L'opera scientifica di Enrico Betti comprende una prima parte dedicata alla Matematica pura ed una seconda attinente alla Fisica Matematica verso la quale finì di spingerlo Bernardo Riemann.

Frutto dei suoi studi in questo secondo campo di ricerca fu appunto il teorema enunciato nel 1872 nel « Nuovo Cimento », che passò, nella storia delle Scienze Fisiche generali e in quella della Teoria dell'Elasticità in particolare, sia sotto il nome del suo Enunciatore, sia sotto quello di teorema di reciprocità in quanto, per esso, si vengono a stringere in un legame di mutua rispondenza due complessi di sollecitazioni esterne (forze e momenti) agenti su un medesimo solido elastico.

Ecco precisamente il suo enunciato: « Il lavoro eseguito da un primo complesso di sollecitazioni esterne applicate ad un corpo elastico durante il prodursi delle deformazioni dovute ad un secondo complesso di sollecitazioni esterne che agissero da sole sul medesimo corpo, è uguale al lavoro che sarebbe eseguito dal secondo complesso durante il prodursi delle deformazioni dovute alle sollecitazioni del primo, agenti anch'esse da sole ».

Lo stesso teorema, ma in forma particolare, era stato enunciato pochi anni prima e precisamente nel 1864 da Giacomo Maxwell, nato ad Edimburgo il 13 giugno 1831 e morto a Cambridge il 5 novembre 1879; questi, dopo essere stato professore al Marischal College di Aberdeen, passò nel 1860 al King's College di

Londra ove rimase fino al 1865. Dopo un intervallo, nel quale ebbe anche a fare un viaggio in Italia (1867), riprese dal 1871 l'insegnamento all'Università di Cambridge quale professore di fisica. Il tempo trascorso nel King's College corrisponde forse al periodo più fecondo di attività originale nel quale appunto trova posto l'enunciazione del teorema che ci interessa.

La forma nella quale Giacomo Maxwell aveva enunciato il teorema di reciprocità era particolare, in quanto i due sistemi di sollecitazioni messi in reciproca relazione erano costituiti semplicemente da una forza sola ed unitaria. È noto che quando il teorema di Betti mette in raffronto due sole sollecitazioni si dice che esso è utilizzato in forma ridotta; se poi le due sollecitazioni sono ambedue forze o ambedue coppie, la forma ridotta dicesi omogenea di primo e secondo tipo; se infine uno dei sistemi di sollecitazione messi in raffronto è rappresentato da una forza e l'altro da una coppia, la forma ridotta dicesi mista. È anche noto che il teorema di Betti scritto in forma ridotta costituisce il fondamento alla teoria delle linee di influenza.

Giacomo Maxwell espresse il teorema di reciprocità in forma ridotta omogenea del primo tipo appunto; poichè poi le forze costituenti i due sistemi di sollecitazioni erano unitarie, al concetto di lavoro poteva venir sostituito quello di spostamento e alla uguaglianza tra i lavori delle due forze quella tra gli spostamenti dei loro punti di applicazione valutati secondo le rette d'azione di quelle. In questa forma, il teorema è molto facilmente verificabile, in quanto la misura sperimentale di uno spostamento rientra nel campo delle comuni possibilità ed è assai più semplice e comoda di quella di un lavoro.

La verifica sperimentale del teorema di Enrico Betti nella forma datagli da Giacomo Maxwell è dovuta a Lord John William Rayleigh. Questo insigne fisico nato a Langford Grove (Essex) il 12 novembre 1842 e morto a Wilham (Essex) il 30 giugno 1919, succeduto al Maxwell nella di lui cattedra di fisica fino al 1884, indi professore di filosofia naturale dal 1887 al 1905 alla Royal Institution di Londra, verificò il teorema operando su travicelli orizzontali costituiti da asticciuole di legno caricate da pesi mobili.

Scopo del presente scritto è quello di far notare come si possa fondatamente avanzare l'ipotesi che già Leonardo da Vinci abbia « sentito » il teorema di reciprocità nella forma ridotta omogenea del primo tipo. Com'è noto, Leonardo mostrò di saper utilizzare alcuni teoremi di energetica, quasi fosse illuminato da una più o meno chiara visione del loro intimo valore, senza dubbio dotato di una recondita e specialissima sensibilità.

Sono ad esempio innumerevoli le proposizioni con le quali egli si riferisce al Teorema dei lavori virtuali e gli schizzi con i quali ne illustra delle pratiche applicazioni. Scelgo a caso il foglio 104, verso *b*) del Codice Atlantico; vi si legge: « E quella cosa che manco resiste, da minor potenza fia remossa, a più lungo moto fia continuata ». In questo e in numerosissimi altri fogli si vedono i disegni di carucole e taglie che rappresentano uno dei più efficaci esempi che ancora oggi si utilizzano per introdurre il Teorema dei Lavori virtuali o per illustrarlo appena

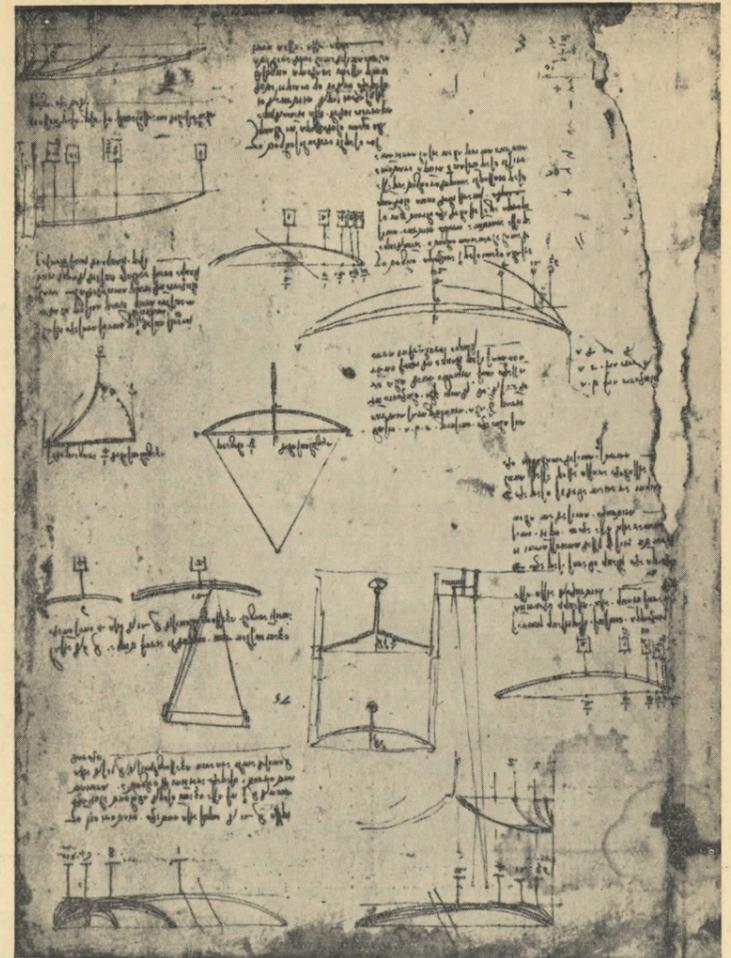
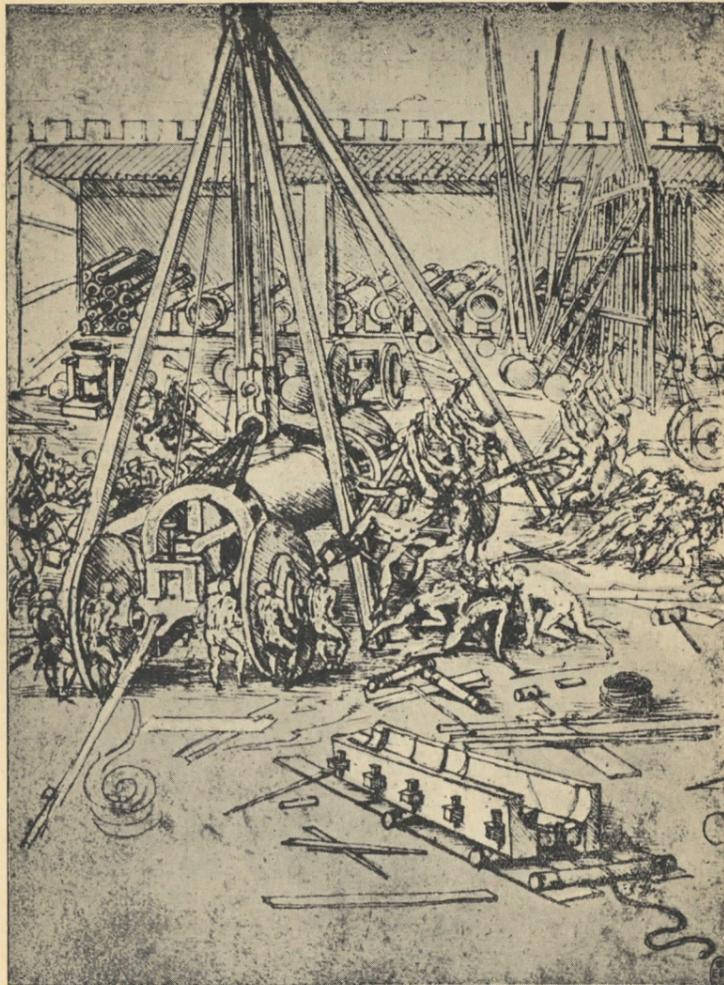
introdotto. Leonardo poi, che non è uomo da fermarsi a mezzo, nel foglio 153, recto *a*) dello stesso Codice Atlantico, esasperando il significato teorico del principio, disegna ciò che amo denominare (mi sembra appropriatamente) « lo schiaccianoci di Leonardo » nel quale appunto le numerose carucole inserite tra i manici di una tenaglia determinano una forte demoltiplicazione dello sforzo necessario a stringerne le ganasce. Nella figura 1, desunta dalla raccolta di Windsor, si scorge il sollevamento di una bocca da fuoco per mezzo di una taglia; nelle mani degli operai si vede il capo della fune « da minor potenza remossa » e « a più lungo moto continuata ».

Mentre Leonardo si riferisce soventissimo a questo Teorema che doveva attendere la sua forma definitiva e la generale sua dimostrazione soltanto da Giovanni Bernoulli (1717) e da Fourier e Lagrange (1800), una volta — almeno per quanto mi risulta dalle personali ricerche — mostra di intravedere un altro notissimo Teorema di energetica, il Teorema del minimo lavoro, detto anche Teorema di Menabrea perchè esposto per la prima volta appunto dal generale Luigi Menabrea (1809-1896) all'Accademia delle Scienze di Torino nel 1857. Al foglio 112, verso *a*) del Codice Atlantico si legge invero: « Ogni azione naturale è generata dalla Natura nel più breve modo che trovar si possa »; siamo, invero, ancor lontani, qui, dal Teorema del minimo lavoro, ma che la situazione nella quale il corpo si trasferisce naturalmente per effetto delle sollecitazioni cui è sottoposto dipenda da una condizione di minimo è un fatto nettamente « sentito » da Leonardo.

Per quanto concerne il Teorema di reciprocità, sembra di dover comprendere leggendo il foglio 211 recto del Codice Atlantico (fig. 2), che Leonardo lo abbia intravisto, o, almeno, che egli si sia prospettata la soluzione di certi problemi caratteristici tra le applicazioni del Teorema stesso facendo sorgere nel lettore moderno il pensiero ch'egli abbia, forse inconsciamente, penetrato lo spirito di esso. E ciò fa, come altre volte, rivolgendosi ad un ipotetico interlocutore ed invitando a sciogliere un certo quesito o a giustificare la soluzione che, ad un certo quesito, egli propone. Così ad esempio, al foglio 242 del Codice Atlantico, non domanda egli forse al suo ideale interlocutore di spiegargli perchè, quando si suonano le campane, « il campanile si dimena »?

Nel foglio 211 già citato egli considera un'« aste equidiacente », ossia, in moderno gergo, una trave prismatica orizzontale semplicemente appoggiata agli estremi, con vincoli allo stesso livello e rigidi e scrive: « Io voglio applicare un peso in mezzo all'aste equidiacente e voglio mantenerle la medesima curvità e mutare esso peso in 5 vari lochi dell'aste, sempre aporpinquandolo a uno delli stremi, e sempre voglio radopiare il passato peso, e trovare a punto in ciascun peso il sito, e manterrà l'aste nella prima curvità ».

Intanto è necessario precisare che il vocabolo « curvità » o « curvatura » o « incurvatura », come Leonardo scrive altrove, non ammette il significato moderno di curvatura, bensì quello di abbassamento, di freccia; invero anche proprio al principio dello stesso foglio 211, recto *b*), egli scrive: « Io ho trovato che un'aste di 12 braccia, applicandole una libbra di peso in mezzo, essa fa uno braccio d'in-



curvatura» il che è più che sufficiente per definire le dimensioni fisiche di ciò che egli denomina «curvatura» o «curvità».

Il problema proposto consiste dunque in questo: osservare quale sia la freccia presentata da una trave semplicemente appoggiata agli estremi, orizzontale e caricata in corrispondenza del suo punto di mezzo e dire quali debbono essere le posizioni di un carico doppio, quadruplo, ecc... del precedente, affinché la freccia in mezzeria sia sempre quella di prima.

Ancora più esplicito è Leonardo nella penultima proposizione, del medesimo foglio 211 recto: «Io voglio sol vedere il peso col quale tu, applicandolo in mezzo alla equidistante aste, le dai certa parte di curvità; di poi tocca l'aste dove ti piace, io ti dirò che peso bisogna appicare in essa parte a voler dare la medesima curvatura a essa aste».

Insomma dapprima si trattava di determinare la posizione di un assegnato carico per produrre in corrispondenza della mezzeria, una assegnata freccia; poi di determinare la intensità di un carico da «appicarsi» in corrispondenza di un assegnato punto dell'asta al fine di produrre — come prima — una assegnata freccia in corrispondenza della mezzeria. Si tratta dunque di esprimere la freccia della trave in corrispondenza di un certo suo punto (la mezzeria) quand'essa sia caricata in corrispondenza di un altro, conoscendo però l'effetto di inflessione della trave quand'essa sia caricata in corrispondenza del primo (Io voglio sol vedere...). Orbene, la soluzione di un simile problema, in qualunque delle due forme nelle quali è stato posto da Leonardo, è immediata non appena si utilizzi il Teorema di Betti. In quanto che la posizione nella quale va posto un carico ad es. doppio di un altro applicato in mezzo alla trave, al fine di mantenere invariata la freccia in mezzeria è quella per la quale la freccia elastica, generata dal carico in mezzeria, presenta una ordinata metà di quella in mezzeria; ed il valore del carico da «appicarsi» in un punto qualunque al fine di mantenere immutata la freccia in mezzeria prodotta da un carico noto, è espresso dal prodotto di questo carico per il rapporto tra le frecce, in mezzeria e nel punto considerato della curva elastica prodotta dal carico in mezzeria.

Si noti che in ambedue le forme considerate del problema, è necessario riferirsi ai lavori e non agli spostamenti (perchè le intensità delle due forze in gioco sono diverse); pertanto Leonardo mostra di affrontare la questione nella forma generale contemplata da Betti quantunque in forma ridotta; ciò fa vedere che Leonardo è andato già oltre i limiti raggiunti dagli stessi Maxwell e Rayleigh.

Assai difficile è seguire Leonardo nello sviluppo del suo pensiero, indirizzato allo studio di qualche particolare questione, col semplice corredo dei suoi codici e manoscritti e scoprire tutti i paesi della sua vasta opera che trattano di uno specifico argomento perchè, quasi non fosse bastata la mancanza originale di qualsiasi collegamento logico tra di essi, le vicende attraverso le quali il prezioso materiale dovette passare e la dispersione che ne seguì, oltre all'abitudine di Leonardo di scrivere da destra verso sinistra, ne resero assai difficile, nonchè il coordinamento, la lettura. Ciò non ostante, mi sembra di poter affermare che il

foglio citato, 211 del Codice Atlantico, sia davvero l'unico nel quale venga adombrato il contenuto del Teorema di reciprocità. Se è difficile o fors'anche impossibile affermare che Leonardo abbia penetrato a fondo il valore del Teorema, mi sembra tuttavia lecito avanzare l'ipotesi che egli ne abbia, almeno nel caso citato, intravista una applicazione, tra quelle che oggi son considerate tra le più dirette, le più espressive e le più feconde, cioè la costruzione delle linee di influenza.

PROF. ING. DOTT. GIUSEPPE MARIA PUGNO